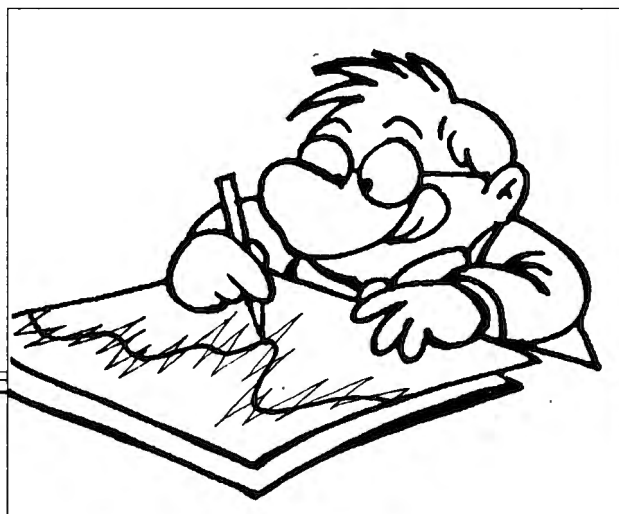


ANALISI DEI DATI



IL LISCIAMENTO ESPONENZIALE CENTRATO: proposta di un semplice metodo di perequazione delle curve per l'analisi di serie storiche di dati

Giuseppe Sansoni*

I ricercatori sanno bene, per esperienza, quanto spesso le serie di dati raccolte sul fenomeno in studio siano disturbate da irritanti irregolarità che ostacolano l'individuazione delle leggi sottostanti o, più semplicemente, l'interpretazione dell'andamento del fenomeno.

Nella fig. 1, ad esempio, relazioni puntuali tra il COD in ingresso e in uscita dal depuratore e l'efficienza depurante (curve a tratto sottile) sono difficili da cogliere, perché mascherate dal forte "rumore di fondo" che caratterizza i parametri in esame.

Indubbiamente, un ritocco delle curve volto ad attenuare le variazioni accidentali e a delineare più chiaramente l'andamento di fondo dei parametri rappresenta un utile ausilio per l'analisi dei dati. Ciò rende ragione della notevole mole di ricerche compiute da lungo tempo sui metodi di interpolazione delle serie di dati, un'ampia rassegna dei quali è illustrata nel trattato di BOLDRINI (1950).

Il lisciamiento, o perequazione, delle curve è un caso particolare di interpolazione ed è spesso impiegato in sostituzione dei metodi con funzioni matematiche (polinomiali, esponenziali, ecc.) per ricavare la tendenza secolare, o asse medio, di una serie storica di dati. Questa operazione rappresenta un passaggio obbligato nell'applicazione di vari metodi, sia deterministici che stocastici, volti ad individuare la presenza di eventuali componenti periodiche, come l'analisi periodale, l'analisi armonica, la cimanalisi (VERCELLI, 1940; VIANELLI, 1954; SANTAMARIA, 1981).

Il lisciamiento, infine, si rivela particolarmente prezioso nel caso di grafici per pubblicazioni di carattere divulgativo, nelle quali interessa illustrare il fenomeno solo nelle sue linee essenziali, evitando dettagli che potrebbero risultare fuorvianti.

Scopo del presente lavoro è illustrare il procedimento che ha consentito di mettere a punto un metodo semplice di lisciamiento di serie storiche di dati e di variarne a piacimento l'entità, come esemplificato nella fig. 2.

* Servizio Multizonale di Prevenzione Ambientale, USL n. 2, via del Patriota 2, Massa.

In un primo momento l'attenzione è stata rivolta ai metodi classici di perequazione delle curve; successivamente, per superare alcuni inconvenienti di tali sistemi, è stato sviluppato il metodo oggetto della presente proposta, detto liscio esponenziale centrato.

Liscio con medie mobili semplici

Il procedimento di perequazione più semplice consiste nel sostituire ad ogni valore y dell'ordinata la media aritmetica y' fra il valore dell'ordinata stessa e le n coppie di ordinate simmetricamente adiacenti:

$$y' = (y_{-n} + \dots + y_{-2} + y_{-1} + y + y_1 + y_2 + \dots + y_n) / (2n+1)$$

L'algoritmo di calcolo impiegato rende ragione del

termine *medie mobili*: calcolata la media y' tra $2n+1$ dati adiacenti, per calcolare la media seguente y'_{t+1} si scarta il primo di essi e si aggiunge il dato successivo, e così via.

Nell'esempio della tab. 1 vengono riportate nella seconda colonna, in funzione del tempo t , i valori delle ordinate y di un frammento di serie storica (12 dati); la terza e quarta colonna riportano le medie mobili aritmetiche y' rispettivamente per $n=1$ dati (media tra la y_t e la coppia adiacente y_{t-1} e y_{t+1}) e per $n=3$ (media da y_{t-3} a y_{t+3}). Esempi di calcolo dei primi due termini delle medie mobili sono:

per $n=1$ ($N=2n+1=3$) (tab. 1: 3ª colonna):

$$y'_1 = (2+4+9)/3 = 5$$

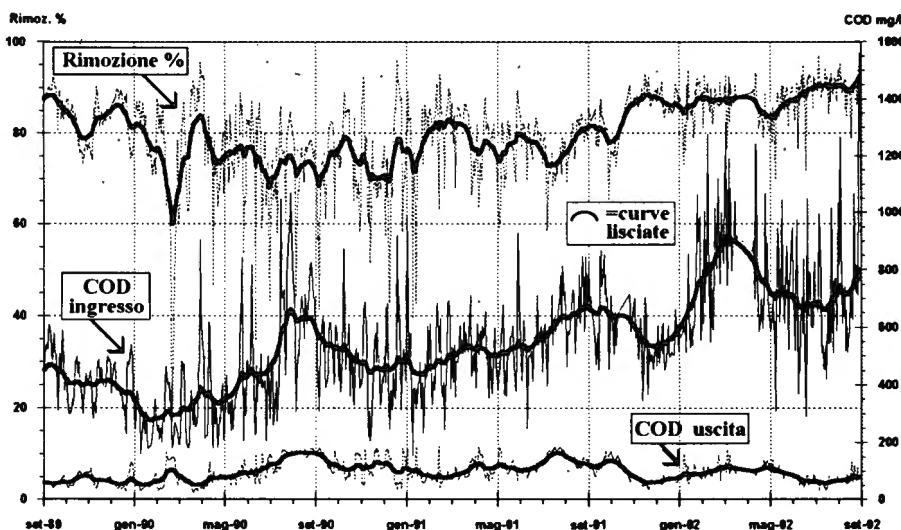
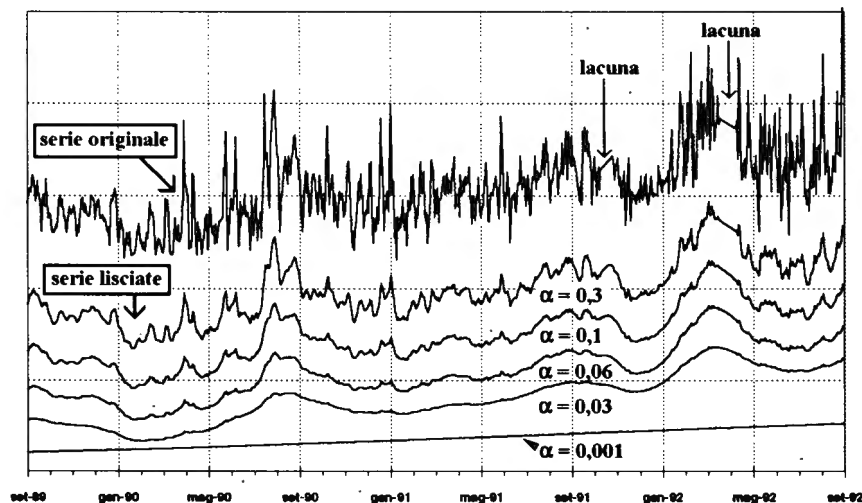


Fig. 1
COD in ingresso e in uscita ed efficienza depurante dell'impianto delle Querce (Massa)

Sovrapponendo alle serie originali, molto irregolari, le curve lisciate si apprezzano con maggiore immediatezza l'andamento generale dei parametri in studio e le relazioni tra essi. Sono meglio individuabili, ad es., le oscillazioni stagionali; a partire dal luglio 1991, inoltre, a seguito della sostituzione dell'insufflazione d'aria compressa con l'iniezione di ossigeno liquido si nota, nonostante l'aumento del carico in ingresso, una tendenza alla diminuzione del COD in uscita e un potenziamento dell'efficienza depurante che si attesta attorno al 90%, riuscendo ad "assorbire" anche punte di carico elevate, quale quella del marzo '92.

Fig. 2
Esempio di vari gradi di liscio

La curva superiore riporta i dati originali del COD in ingresso al depuratore delle Querce (gli stessi dati della curva al centro nella fig. 1). Le altre curve, procedendo verso il basso, rappresentano liscii progressivamente più spinti, ottenuti col metodo esponenziale proposto nell'articolo; per evitarne la sovrapposizione, le varie curve sono state arbitrariamente traslate sull'asse delle ordinate. La potenza e versatilità del metodo sono illustrate dalla facilità con la quale la serie originale può essere liscia - fino a ridurla addirittura rettilinea - semplicemente riducendo il solo valore della costante di liscio esponenziale α , il cui significato è spiegato nel testo. I due tratti rettilinei indicati dalle frecce rappresentano lacune della serie originale, colmate con valori intermedi a quelli dei dati adiacenti.



$$y'_2 = (4+9+5)/3 = 6 \quad \dots (\text{ecc.})$$

e per $n=3$ ($N=2n+1=7$) (tab. 1: 4ª colonna):

$$y'_3 = (2+4+9+5+1+3+2)/7 = 3,71$$

$$y'_4 = (4+9+5+1+3+2+7)/7 = 4,43 \quad \dots (\text{ecc.}).$$

La tab. 1 e il relativo grafico (fig. 3) mostrano due importanti caratteristiche del lisciamento con medie mobili:

- quanto più elevato è N , tanto più spinto risulta il lisciamento (il valore $n = [N-1]/2$, corrispondente al numero di coppie di dati utilizzate nel calcolo della media mobile, è definito "età media" dei dati);
- per i primi e gli ultimi n termini della serie storica non è possibile calcolare la media mobile; rispetto alla serie originaria, la curva lisciata risulta perciò mancante di n valori ad ogni estremo della serie.

Lisciamento con medie mobili ponderate

Per le operazioni di perequazione si usano da lungo tempo combinazioni del tipo seguente:

$$y' = 2a_0 y + a_1 (y_{-1} + y_1) + a_2 (y_{-2} + y_2) + \dots + a_n (y_{-n} + y_n)$$

in cui i coefficienti $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ hanno valori progressivamente decrescenti e tali che:

$$2(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 1.$$

Con tale accorgimento si realizza il calcolo di medie mobili *ponderate* in cui, per la scelta di coefficienti decrescenti, la zona centrale dell'intervallo degli N dati perequati viene ad essere influenzata più debolmente dalle variazioni di forma che si sviluppano ai suoi lati.

VERCELLI (1940), oltre ad esporne i metodi di calcolo, fornisce utili combinazioni di coefficienti per ciascuna delle seguenti finalità: lisciamento, calcolo dell'asse medio, selezione di eventuali componenti ondulatorie a periodo breve o a periodo lungo. Nell'appendice A si riportano le combinazioni di più largo impiego per il lisciamento e per il calcolo dell'asse medio (da eseguirsi sui dati già lisciati).

Applicando, a titolo di esempio, le combinazioni proposte per il lisciamento alla serie della tab. 1, il calcolo dei primi due termini lisciati risulta:

per $n=1$ ($N=3$); $2a_0=1/2$; $a_1=1/4$:

$$y'_1 = 1/2 (4) + 1/4 (2+9) = 4,75$$

$$y'_2 = 1/2 (9) + 1/4 (4+5) = 6,75$$

Tab. 1

Esempio di calcolo di medie mobili semplici (y') di 3 e di 7 dati. Gli asterischi contrassegnano le medie mobili non calcolabili.

t	y	y' ($N=3$)	y' ($N=7$)
0	2	*	*
1	4	5	*
2	9	6	*
3	5	5	3,71
4	1	3	4,43
5	3	2	4,71
6	2	4	4,14
7	7	5	3,57
8	6	6	3,86
9	5	4	*
10	1	3	*
11	3	*	*

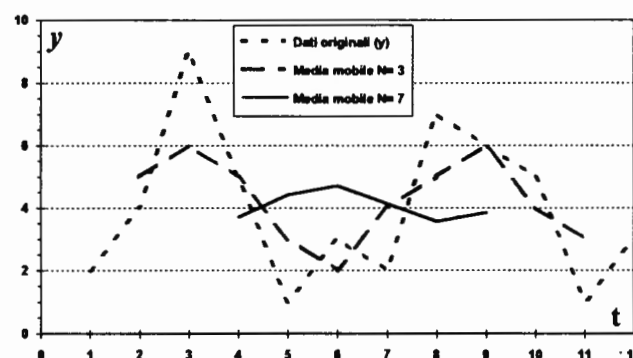


Fig. 3

Lisciamento con medie mobili *semplici* (per $N=3$ e $N=7$) della serie riportata nella tab. 1. Si noti che utilizzando un N più elevato si ottiene un lisciamento più spinto, a prezzo di un maggiore accorciamento della serie ad entrambi gli estremi.

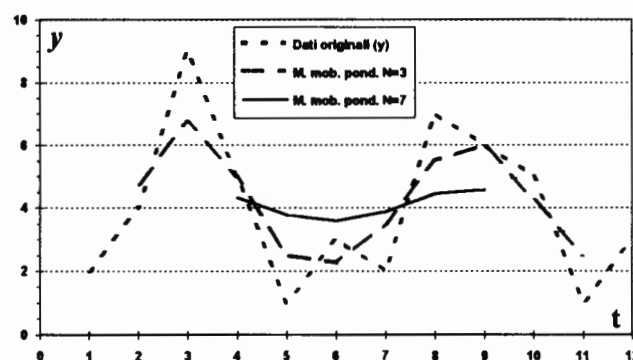


Fig. 4

Lisciamento con medie mobili *ponderate* (combinazioni di Vercelli per $N=3$ e $N=7$) della serie riportata nella tab. 1. Si noti come, soprattutto per $N=7$, la curva lisciata ponderata segua più fedelmente l'andamento della serie originale rispetto alla media mobile semplice (si confrontino le curve per $N=7$ delle fig. 3 e 4 con i dati originali).

per $n=3$ ($N=7$); $2a_0=1/4$; $a_1=1/5$; $a_2=1/8$; $a_3=1/20$:

$$y'_3 = 1/4 (5) + 1/5 (9+1) + 1/8 (4+3) + 1/20 (2+2) = 4,325$$

$$y'_4 = 1/4 (1) + 1/5 (5+3) + 1/8 (9+2) + 1/20 (4+7) = 3,775$$

La fig. 4 mostra i dati originali e le due curve lisce con $N=3$ e $N=7$; confrontando queste ultime con le corrispondenti curve della fig. 3, si nota che le combinazioni proposte da Vercelli, assegnando maggior peso al dato centrale e pesi decrescenti alle y più distanti da esso, producono un miglior adattamento alla serie originaria.

Questo metodo fornisce ottimi risultati, riuscendo a ricondurre spezzate irregolari ad interpolatrici con curvature molto regolari.

Il metodo, tuttavia, non è scevro da inconvenienti:

- 1) per ottenere lisciami spinti occorre procedere a diversi lisciami successivi (sono consigliate combinazioni con N crescente, utilizzando come dati originali per ciascun liscio quelli ottenuti dal liscio precedente;
- 2) le formule di calcolo, pur essendo semplici, richiedono attenzione nell'esecuzione; per aumentare o ridurre il grado di liscio fino a quello ritenuto soddisfacente occorre ripetere una o più volte l'intera procedura; nel caso di utilizzo di computer, gli archivi del foglio elettronico o del programma di calcolo utilizzato divengono ben presto ingombranti, rallentando l'esecuzione del programma;
- 3) la serie liscia risulta accorciata agli estremi (rispetto a quella originale) di un numero di dati pari a $2n$ (ove n è la somma delle coppie di dati utilizzate nei lisciami successivi); lisciami spinti si "pagano" con un eccessivo accorciamento e possono quindi essere applicati solo a serie storiche molto lunghe e continue. Se la serie presenta interruzioni si è costretti, per evitare un proibitivo accorciamento ai lati di ciascuna interruzione, a riempire i "buchi" della serie con dati fittizi, ottenuti per interpolazione tra i termini adiacenti.

Il liscio esponenziale

Al fine di prevedere l'osservazione successiva, in vari campi applicativi (vedi appendice B) si utilizza la media mobile *esponenzialmente ponderata* della serie storica di dati precedenti:

$$y'_t = \alpha (y_{t-1}) + (1-\alpha) (y'_{t-1})$$

in cui:

y'_t = previsione per il tempo t ;

y_{t-1} = ultima osservazione misurata;

y'_{t-1} = previsione precedente;

α = costante di liscio (compresa tra 0 e 1)

Considerato che la previsione precedente (y'_{t-1}), analogamente a quella attuale (y'_t), incorpora la previsione ad essa precedente (y'_{t-2}) e questa, a sua volta, incorpora y'_{t-3} e così via, a ritroso, appare intuitivo che il livellamento esponenziale è una sorta di media mobile di tutte le osservazioni precedenti, a ciascuna delle quali viene assegnato un peso decrescente in progressione geometrica man mano che ci si allontana dall'ultima osservazione.

L'idea guida del presente lavoro è stata quella di utilizzare il "prodotto intermedio" del metodo previsionale (il liscio esponenziale) al puro scopo di mitigare le irregolarità di serie storiche di dati, tralasciando quindi l'elaborazione statistica dell'errore di previsione (scarto tra la previsione e il nuovo valore osservato) che -pur rappresentando l'obiettivo centrale del metodo- esulava dagli scopi del lavoro.

Un esempio varrà a meglio chiarire il significato di α e l'intero procedimento: scegliere un valore di $\alpha=0,2$ equivale ad assegnare, ai fini della previsione attuale (y'_t) un peso del 20% al valore dell'ultima osservazione (y_{t-1}) e il restante 80% (cioè $1-\alpha$) all'intera serie di osservazioni precedenti, ciascuna delle quali contribuisce per il 20% del proprio peso al valore del nuovo residuo. Così, procedendo a ritroso, i pesi delle ultime osservazioni e i pesi residui dell'insieme delle osservazioni precedenti risultano:

osservazioni	peso	peso residuo
y_{t-1}	0,2	$1 - 0,2 = 0,8$
y_{t-2}	$0,2 \cdot 0,8 = 0,16$	$0,8 - 0,16 = 0,64$
y_{t-3}	$0,2 \cdot 0,64 = 0,128$	$0,64 - 0,128 = 0,512$
y_{t-4}	$0,2 \cdot 0,512 = 0,1024$	$0,512 - 0,1024 = 0,4096$
y_{t-5}	$0,2 \cdot 0,4096 = 0,08192$	 ecc.

In altre parole, l'ultima osservazione pesa il 20% del proprio valore e le osservazioni precedenti, in ordine di età crescente, assumono un peso progressivamente ridotto in ragione geometrica: 16%, 12,8%, 10,24%, 8,19%, ecc. Nell'appendice C sono riportati, per alcuni valori di α , i pesi percentuali degli ultimi 30 dati di una serie storica, ricavabili dalla formula:

$$\text{peso} = \alpha (1 - \alpha)^t$$

L'età media dei dati considerati nel lisciamiento esponenziale è:

$$n = (1 - \alpha) / \alpha.$$

Ciò consente di calcolare, per ogni valore di α , il numero N di osservazioni ($N = 2n + 1$) della media mobile equivalente al lisciamiento esponenziale effettuato (tab. 2).

Ai nostri fini, le proprietà più interessanti del lisciamiento esponenziale sono (BROWN, 1962):

- il metodo è accurato;
- il procedimento di calcolo è molto semplice: per calcolare il nuovo valore lisciato è sufficiente conservare un solo numero (y'_{t-1});
- il metodo è molto flessibile: scegliendo un valore di α piccolo la stima diviene analoga ad una media mobile di molti dati precedenti e si ottiene quindi un lisciamiento spinto; adottando un valore di α elevato, invece, la stima risponde rapidamente al variare dei dati osservati e il lisciamiento risulta di modesta entità.

Il lisciamiento esponenziale "centrato"

La fig. 5 mostra, con tratto progressivamente più marcato, tre lisciamienti esponenziali -rispettivamente con $\alpha = 0,25$, $\alpha = 0,06$ e $\alpha = 0,01$ - delle registrazioni delle portate giornaliere in ingresso ad un depuratore.

Mentre il primo lisciamiento (con $\alpha = 0,25$) può apparire soddisfacente in quanto, riducendone sensibilmente le brusche variazioni, sembra seguire fedelmente l'andamento dei dati originali, nel secondo e terzo lisciamiento compaiono alcune evidenti distorsio-

ni, indicate nella figura dai numeri cerchiati.

Riflettendo sulle implicazioni dell'algoritmo di calcolo del lisciamiento esponenziale appare chiara la ragione delle distorsioni riscontrate.

Si ricordi che le medie mobili, semplici o ponderate, sono calcolate su n coppie di dati disposti *simmetricamente* ai lati di un termine centrale: esse tengono conto perciò sia dei dati precedenti che di quelli successivi. Le medie mobili esponenziali, invece, sono *asimmetriche*: essendo state concepite a scopi previsionali, tengono conto solo dei dati precedenti e rispondono quindi con un certo ritardo (dipendente dall'età media dei dati) alle variazioni dei dati originali.

Utilizzando la formula riportata a inizio pagina, ai valori di α scelti per i lisciamienti della fig. 5 corrispondono le seguenti età medie:

per $\alpha = 0,25$	$n = 3$ giorni;
per $\alpha = 0,06$	$n \approx 16$ giorni;
per $\alpha = 0,01$	$n = 99$ giorni.

Ci si potrebbero perciò attendere, per i tre lisciamienti utilizzati, slittamenti a destra rispettivamente di 3, 16 e 99 giorni; in realtà lo slittamento è più contenuto, perché parzialmente compensato dal maggior peso attribuito ai dati più recenti.

Si noti che i vari tipi di distorsione evidenziati nella fig. 5 sono tutti attribuibili ad un unico fattore: il ritardo col quale la media mobile esponenziale risponde alle variazioni dei dati.

Per valori di α maggiori di 0,2 lo slittamento può risultare non apprezzabile e, per molti scopi, trascurabile: è questo il caso dell'uso a fini previsionali in cui ci si limita prudenzialmente, di norma, a previsioni di breve periodo. Per α minore di 0,2 -invece- la risposta ritardata può produrre deformazioni inaccettabili nella rappresentazione dei dati lisciati, vanificando il principale vantaggio del lisciamiento esponenziale: la flessibilità con la quale, semplicemente variando il valore di α , si può variare a piacere l'entità del lisciamiento.

Considerato che, per l'applicazione al lisciamiento delle curve, non interessa il carattere previsionale del metodo in quanto si dispone già dell'intera serie storica dei dati, si è pensato di aggirare gli ostacoli incontrati con uno stratagemma.

E' ragionevole supporre che, se il lisciamiento previsionale produce un *ritardo* nella risposta e quindi uno slittamento a destra della curva lisciata, un lisciamiento eseguito a ritroso -a partire dall'ultimo dato

Tab. 2

Relazione tra il valore di α , l'età media (n) e il numero N di osservazioni della media mobile corrispondente al lisciamiento esponenziale (da CEMBROWSKI et AL., 1975)

α	n	N
1,000	0	1
0,667	0,5	2
0,500	1	3
0,400	1,5	4
0,333	2	5
0,200	4	9
0,100	9	19
0,050	19	39
0,020	49	99
0,010	99	199
0,005	199	399

della serie fino al primo- produrrà una risposta *anticipata* (rispetto alla serie originaria) e uno slittamento a sinistra della curva lisciata (si veda la figura nell'appendice D). La media aritmetica tra le coppie di medie mobili esponenziali così ottenute, *previsionale* (dal primo termine all'ultimo) e *retrovisionale* (dall'ultimo al primo), dovrebbe perciò produrre una risposta lisciata perfettamente centrata sui dati originali, senza ritardo né anticipo.

Le curve lisciate della fig. 6 (serie delle medie aritmetiche tra le coppie corrispondenti di medie mobili esponenziali: previsionale e retrovisionale) mostrano, in effetti, come tutte le deformazioni evidenziate nella fig. 5 siano scomparse: si noti, in particolare, come i massimi e i minimi delle curve lisciate mostrino un'ottima corrispondenza con quelli della serie origi-

nale e come, anche in senso verticale, le curve lisciate siano ben centrate rispetto alle oscillazioni dei dati originali. Per queste caratteristiche di centratura orizzontale e verticale rispetto alla serie originale, definiremo il procedimento impiegato *lisciamento esponenziale centrato*.

Il lisciamento esponenziale centrato: verifica del metodo

La fig. 6 induce a ritenere che l'idea di annullare le deformazioni legate al ritardo prodotto dal lisciamento previsionale, mediandole con le opposte deformazioni (anticipo) indotte da quello retrovisionale, rappresenti una felice intuizione. Resta ora da verificare, in maniera più rigorosa della semplice impressione visiva, la correttezza dell'interpolazione ottenuta e da segnalare

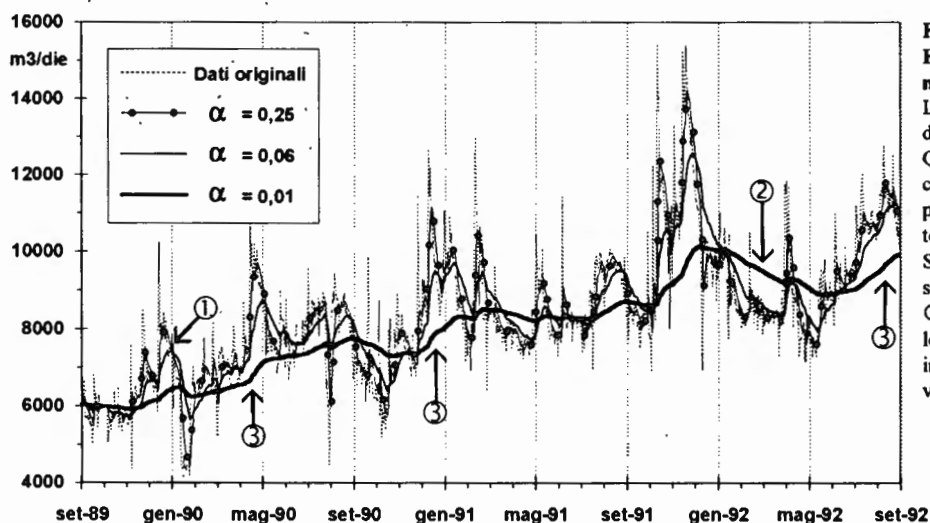


Fig. 5

Esempio di tre gradi di lisciamento esponenziale semplice (previsionale)

La curva punteggiata riporta i dati originali della portata in ingresso al depuratore delle Querce. Le curve continue rappresentano, con tratto via via più marcato, lisciami progressivamente più spinti, ottenuti col metodo esponenziale previsionale.

Si osservino -rispetto ai dati originali- lo slittamento verso destra dei picchi lisciati ①, le sovrastime ② che seguono i massimi, le sottostime ③ che seguono i minimi e, più in generale, un certo slittamento verticale, verso il basso delle curve lisciate.

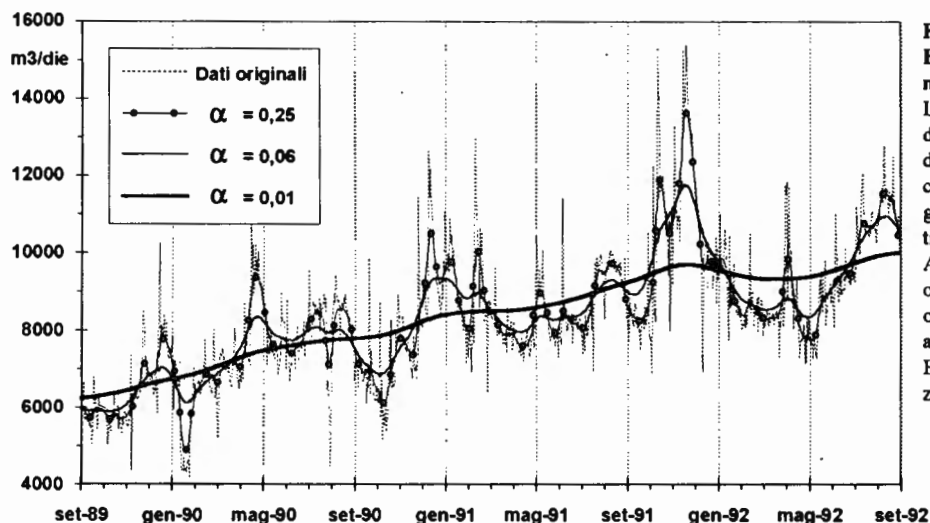


Fig. 6

Esempio di tre gradi di lisciamento esponenziale centrato

Le deformazioni in senso opposto prodotte dal lisciamento esponenziale previsionale e da quello retrovisionale si annullano a vicenda col semplice artificio di riportare nel grafico la serie ottenuta dalla media aritmetica tra le due serie lisciate.

Ad ogni grado di lisciamento corrisponde ora una curva perfettamente centrata, sia orizzontalmente che verticalmente, rispetto alla serie originale.

E' con questo metodo che sono stati realizzati i lisciami mostrati nelle fig. 1 e 2.

un problema finora taciuto: come ottenere il valore della prima previsione (y'_0) visto che, essendo all'inizio della serie, non vi sono dati precedenti da utilizzare per la previsione?

Per quanto riguarda il valore da assegnare ad y'_0 , SANTAMARIA (1981), rilevato che non vi sono soluzioni precise, suggerisce tre possibilità: se è possibile avanzare ipotesi ragionevoli sulle condizioni iniziali, il valore di y'_0 è frutto di tali valutazioni, altrimenti si può adottare la media delle prime n osservazioni della serie storica o infine, più semplicemente, il valore stesso del primo dato di essa.

La correttezza del metodo proposto può essere verificata applicando il lisciamiento esponenziale centrato ad una sinusoidale che, per la sua regolarità e simmetria, risulta particolarmente adatta allo scopo. Una sinusoidale è descritta dall'equazione:

$$y = A \sin(\omega t + \delta)$$

in cui A è l'ampiezza, t il tempo, ω la frequenza angolare ($\approx 2\pi / \text{periodo}$) e δ la fase dell'onda. Nel caso specifico, per i parametri della sinusoidale sono stati utilizzati i seguenti valori:

$$A = 25 \quad \omega = 10 \quad \delta = 4,7.$$

La fig. 7 mostra un lisciamiento di modesto grado ($\alpha = 0,25$) della sinusoidale, impiegando come primo valore della previsione (y'_0) il valore del primo dato della serie originale; analogamente, al primo termine della retrovisione è stato assegnato il valore dell'ultimo dato della serie originale.

Conformemente alle aspettative, la curva previsionale risulta chiaramente slittata a destra e quella retrovisionale a sinistra, mentre i massimi e i minimi della curva "centrata" corrispondono esattamente a quelli della sinusoidale di riferimento, dalla quale differiscono solo per l'ampiezza, la cui riduzione era, appunto, l'obiettivo del lisciamiento.

Si notino, tuttavia, gli scostamenti dalla simmetria ai due estremi della curva lisciata: in particolare, il suo minimo all'estremo sinistro è sensibilmente più basso dei minimi successivi.

Per mostrare come tale deformazione si accentui progressivamente con l'entità del lisciamiento, fornendo risultati inaccettabili, si riportano nella fig. 8 tre lisciamiamenti esponenziali centrati, rispettivamente con $\alpha = 0,25$, $0,1$ e $0,05$. La curva col massimo lisciamen-

to risulta tutta al di sotto dello zero (in maggior misura a sinistra) poiché entrambe le estremità della serie originale intersecano l'asse delle ordinate a valori negativi (in maggior misura a sinistra).

Ancora una volta, tale deformazione è attribuibile al ritardo che caratterizza il lisciamiento spinto: con $\alpha = 0,05$ -infatti- ogni nuovo dato contribuisce solo per il 5% del proprio valore alla nuova previsione e quindi la curva -che inizia con un valore negativo- impiega molto tempo a risalire.

Si pone dunque il problema, già accennato, di scegliere un valore adeguato per il primo dato previsionale e retrovisionale. A tal fine si propone il criterio di ricavare graficamente, estrapolandoli dagli estremi della serie originale, i valori "desiderabili" per i due estremi della curva lisciata e di assegnare tali valori alle y'_0 previsionale e retrovisionale. Il criterio, seppure empirico, risulta molto semplice: sono sufficienti uno o due tentativi per ottenere un ottimo adattamento.

La fig. 9 riporta la sinusoidale originale e tre lisciamiamenti esponenziali centrati coi valori estremi ritoccati in tal modo. Il terzo lisciamiento è talmente spinto ($\alpha = 0,003$) da ridurre la sinusoidale ad una retta perfettamente sovrapposta all'asse delle ascisse. La facilità con la quale sono state ottenute, dalla sinusoidale di riferimento, le tre serie lisciate -perfettamente simmetriche, con frequenza inalterata e ampiezza progressivamente ridotta fino alla retta, considerabile come una sinusoidale con ampiezza zero- testimonia la grande versatilità del metodo.

Va precisato che il valore da scegliere per ritoccare gli estremi della curva lisciata dipende dall'entità del lisciamiento stesso. Nel caso di lisciamiento spinto, infatti, il primo valore previsionale deve simulare il contenuto di una lunga serie di dati precedenti (inesistenti) e richiede quindi un'estrapolazione di "lunga gittata" mentre per lisciamiamenti modesti deve incorporare in sé pochi dati.

Il ritocco risulta superfluo se le estremità della serie originale non presentano vistose pendenze; per questo motivo, nei grafici delle fig. 1, 2 e 6 non si è ritenuto necessario apportare alcun ritocco e ci si è accontentati di utilizzare, per le y'_0 previsionale e retrovisionale, rispettivamente il primo e l'ultimo dato della serie originale.

Come ulteriore verifica, si è proceduto al confronto tra il lisciamiento esponenziale centrato e il classico

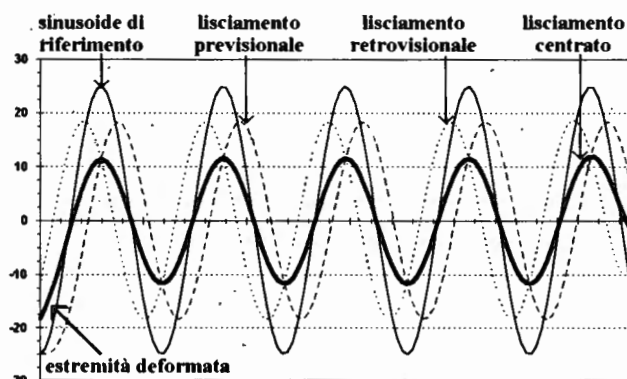


Fig. 7

Modesto lisciamento esponenziale di una sinusoide

Si notino gli slittamenti in senso opposto delle curve previsionale e retrovisionale e la perfetta corrispondenza dei massimi e minimi della serie originale con quelli della curva esponenziale centrata. Quest'ultima, tuttavia, è deformata alle due estremità, soprattutto a quella di sinistra, il cui minimo è sensibilmente più basso degli altri.

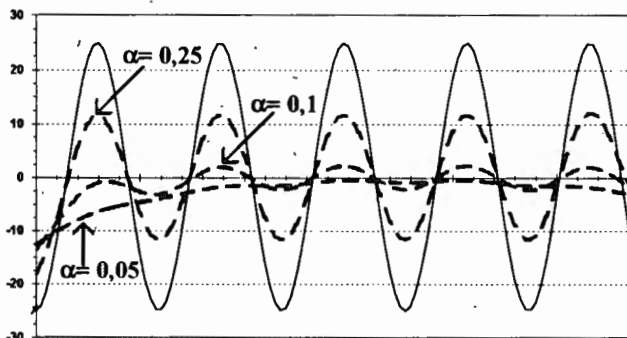


Fig. 8

Tre gradi di lisciamento esponenziale centrato di una sinusoide

Riducendo α si ottiene un lisciamento più spinto, ma si accentuano le deformazioni: il primo massimo della curva con $\alpha=0,1$ e l'intera curva con $\alpha=0,05$ forniscono risultati inaccettabili: quest'ultima, addirittura, corre interamente sotto lo zero, anziché disporsi simmetricamente ad esso.

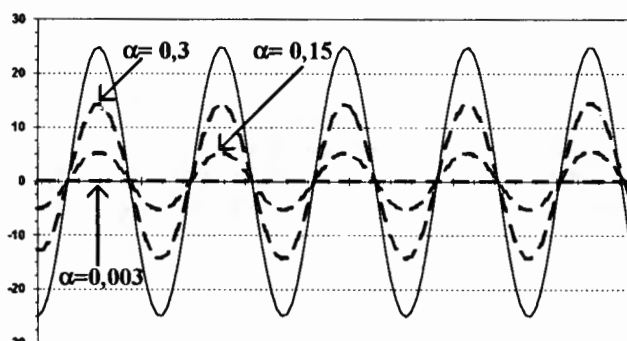


Fig. 9

Tre gradi di lisciamento esponenziale centrato di una sinusoide, con correzione empirica agli estremi

La correzione empirica elimina le vistose distorsioni delle curve lisciate evidenziate nella fig. 8. I valori utilizzati per il primo dato previsionale e retrovisionale sono rispettivamente: -11,5 e -10,5 per $\alpha=0,3$; -5,2 e -10,5 per $\alpha=0,15$; 0 e 0 per $\alpha=0,003$. La curva liscata con $\alpha=0,003$ mostra eloquentemente come sia possibile controllare a piacere l'entità del lisciamento, fino a ridurre la sinusoide ad una retta (linea tratteggiata marcata) coincidente con l'asse delle ascisse (linea continua sottile).

metodo delle medie mobili ponderate, eseguiti su una serie storica reale (determinazioni quotidiane del COD in ingresso ad un depuratore).

La fig. 10 mostra, con tratto marcato, la curva risultante dalle medie mobili ponderate del COD in ingresso ad un depuratore e, con tratto sottile (in gran parte invisibile per la sovrapposizione delle curve), un lisciamento esponenziale centrato con $\alpha=0,06$; i lievi scostamenti tra i due metodi di lisciamento - indicati dalle frecce - appaiono, ai fini pratici, trascurabili. Si tenga presente che col metodo delle medie mobili ponderate si sono resi necessari tre lisciami successivi ($N=11$ seguito da $N=33$ e $N=65$); oltre alla laboriosità della procedura, il lisciamento è stato ottenuto al prezzo di un accorciamento di 53 dati a ciascuna estremità della serie originale. Il lisciamento esponenziale centrato, invece, oltre a risultare più rapido e flessibile, non ha prodotto alcun accorciamento della serie storica.

Volendo aumentare l'entità del lisciamento, le medie mobili -semplici o ponderate- diventano improponibili, soprattutto se la serie originale presenta alcune lacune. La serie originale del COD in ingresso al depuratore utilizzata come esempio in questo lavoro presentava, in realtà, una lacuna di 15 giorni nell'ottobre '91 ed una di 20 giorni nel marzo-aprile '92.

Per realizzare le figure presentate finora tali lacune sono state riempite con dati intermedi tra gli estremi di ciascuna lacuna: questi tratti, artificialmente rettilinei, sono indicati da frecce nella fig. 2.

La fig. 11, eseguita sulla serie originale -senza colmarne arbitrariamente le lacune, quindi con sei estremità- mostra come un quadruplo lisciamento con medie mobili ponderate ($N_{totale}=165$) conduca ad un accorciamento totale di $82 \cdot 6 = 492$ giorni: oltre 16 mesi di registrazioni giornaliere inutilizzate!

Col metodo proposto, invece, non si verifica alcun accorciamento, nemmeno spingendo oltre il lisciamento e in presenza di lacune.

Per verificare l'ambito di applicabilità del lisciamento esponenziale centrato, sono state infine lisciate curve regolari (retta parallela alle ascisse, retta inclinata, parabola, esponenziale), rese artificialmente irregolari ("casualizzate") combinando la rispettiva serie generatrice con una serie di numeri casuali.

Tralasciando la rappresentazione grafica dei primi due casi -che ha dimostrato un buon adattamento alle

serie originarie- si riporta nella fig. 12 una parabola "casualizzata" (ottenuta addizionando una serie di numeri casuali ai termini dell'equazione $y = 2x^2 + 10x + 60000$), un lisciamiento esponenziale ($\alpha = 0,3$), uno con medie mobili ponderate (combinazione di Vercelli per $N = 17$) e la parabola teorica descritta

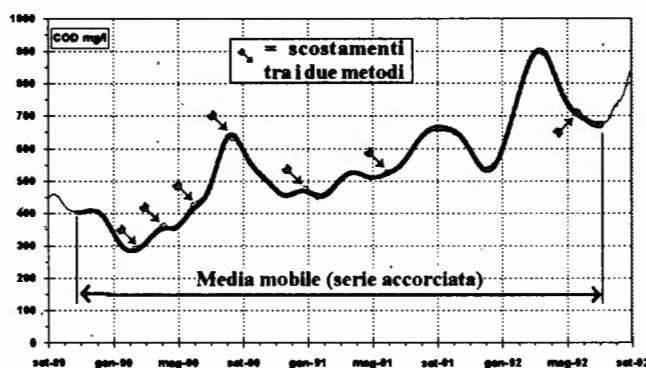


Fig. 10

Confronto tra due metodi di lisciamiento

Un triplo lisciamiento con medie mobili ponderate (linea marcata) è stato riprodotto con facilità (linea sottile) variando il solo valore della costante di lisciamiento esponenziale ($\alpha = 0,06$). Gli scostamenti tra le due curve sono indicati dalle frecce. Si noti anche il sensibile accorciamento, ad entrambe le estremità, della curva lisciata con medie mobili ponderate.

La serie originale, non riportata nella figura, è costituita dai valori di COD registrati quotidianamente in ingresso al depuratore delle Querce (curva molto irregolare al centro della fig. 1).

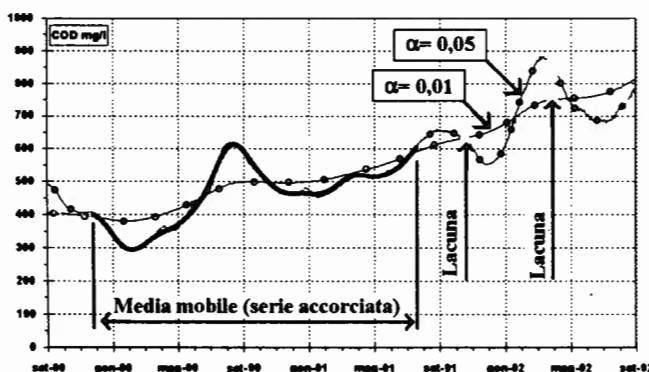


Fig. 11

Confronto tra due metodi di lisciamiento nel caso di serie storiche lacunose

Le interruzioni della serie originale non disturbano eccessivamente il lisciamiento esponenziale (linee sottili), sia esso lieve o spinto.

Nonostante un quarto lisciamiento (linea marcata), l'ampiezza della curva ottenuta con medie mobili ponderate della fig. 10 subisce solo una leggera attenuazione. Per l'accorciamento ai lati di ciascuna lacuna di dati della serie originale, inoltre, la curva lisciata risulta molto ridotta: oltre 16 mesi di registrazioni quotidiane risultano inutilizzate! Le medie mobili ponderate, dunque, divergono impraticabili per lisciami spinti o nel caso di serie storiche con lacune (che si è costretti a riempire con dati fittizi: vedi fig. 2).

dall'equazione citata. Anche in questo caso entrambi i lisciami appaiono corretti; il lisciamiento esponenziale centrato, tuttavia, produce una curva piuttosto "seghettata" mentre le medie mobili producono curvature più regolari.

La fig. 13 mostra una curva esponenziale "casualizzata" (ottenuta moltiplicando per numeri casuali ciascun termine dell'equazione $y = 2^x$), un lisciamiento esponenziale ($\alpha = 0,3$), uno con medie mobili ponderate ($N = 17$) e l'esponenziale teorica descritta dall'equazione citata. Rispetto all'andamento della curva teorica, il lisciamiento esponenziale centrato appare ancora accettabile mentre quello con medie mobili, producendo nette sovrastime, risulta palesemente inadeguato. Una dimostrazione più convincente della bontà del lisciamiento esponenziale può ricavarsi riportando le curve lisciate in un diagramma semilogaritmico (fig. 14).

La sovrastima fornita dalle medie mobili è spiegata dal fatto che queste -seppure ponderate- sono di tipo aritmetico mentre la serie originale cresce in ragione esponenziale. Ad esempio, osservando i primi 5 termini dell'esponenziale $y = 10^x$

x	1	2	3	4	5
y	10	100	1000	10000	100000
Med. Mob.	-	370	3700	37000	-

risulta chiaro che nel calcolo della media aritmetica fra tre termini adiacenti il primo di essi ha un'influenza trascurabile (poiché è, rispettivamente, 10 e 100 volte più piccolo del secondo e terzo termine) e la massima influenza è esercitata dal termine più elevato: ciò determina sistematiche sovrastime. Il lisciamiento con medie mobili non è dunque applicabile a serie con tendenze esponenziali (o geometriche) mentre il lisciamiento esponenziale centrato risulta di applicabilità più generale.

Per i vantaggi descritti e l'estrema versatilità, si propone dunque il *lisciamiento esponenziale centrato* come metodo sostitutivo delle medie mobili semplici e ponderate, soprattutto quando si desidera ottenere un lisciamiento spinto, o variarne rapidamente e a piacere l'entità o, infine, quando le serie storiche siano relativamente brevi o presentino lacune. Per lisciami di lieve entità di serie storiche senza lacune, invece, il metodo delle medie mobili può risultare preferibile, per le curvature più regolari prodotte.

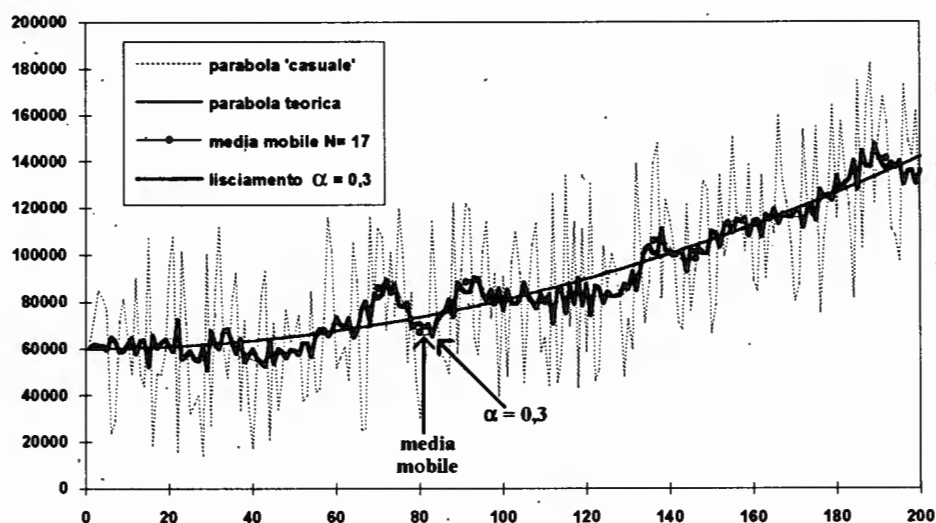


Fig. 12

Lisciamento esponenziale centrato e con medie mobili ponderate di una serie parabolica "casualizzata"

Il lisciamento esponenziale mostra un andamento analogo a quello ottenuto con medie mobili ponderate, ma presenta un aspetto più "seghettato".

La parabola teorica di riferimento riporta i termini dell'equazione

$$y = 2x^2 + 10x + 60000$$

La parabola "casualizzata" da lisciare è stata ricavata aggiungendo una serie di numeri casuali alla parabola teorica.

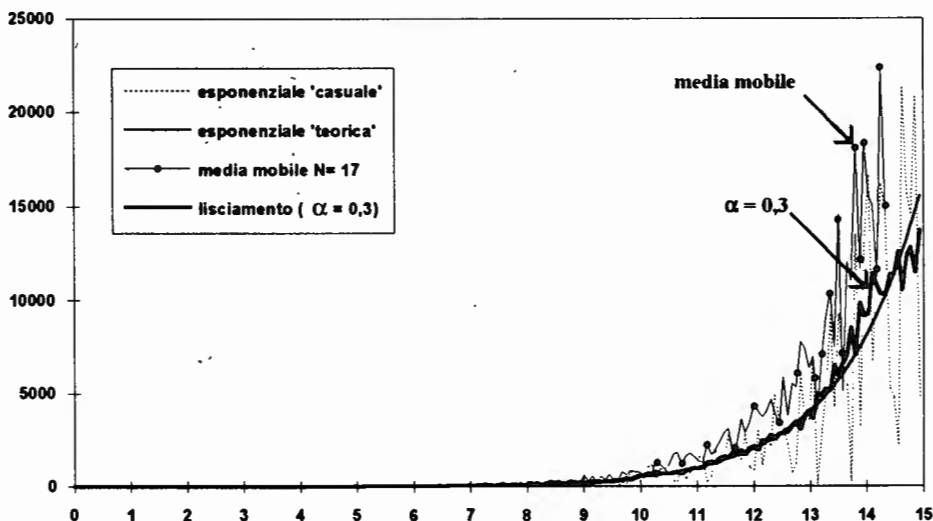


Fig. 13

Lisciamento esponenziale centrato e con medie mobili ponderate di una serie esponenziale "casualizzata"

Il lisciamento esponenziale centrato fornisce una descrizione accettabile anche dell'andamento di una serie con tendenza crescente in maniera esponenziale. Il lisciamento con medie mobili ponderate, invece, produce una curva sistematicamente al di sopra della serie originale e risulta, perciò, inapplicabile a serie di questo tipo. L'esponenziale teorica di riferimento riporta i termini dell'equazione: $y = 2^x$

L'esponenziale "casualizzata" da lisciare è stata ricavata moltiplicando i termini della parabola teorica per una serie di numeri casuali compresi tra 0 e 1.

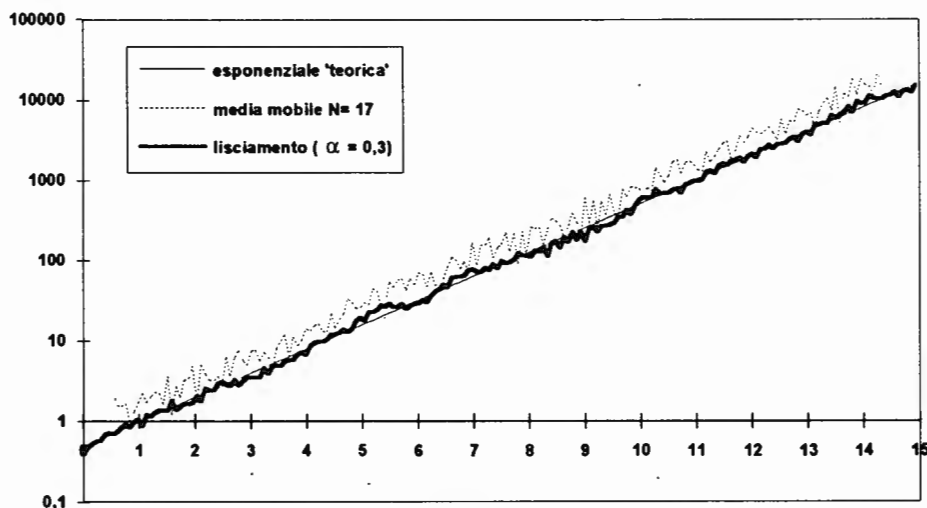


Fig. 14

Lisciamento esponenziale centrato e con medie mobili ponderate di una serie esponenziale "casualizzata" (diagramma semilogaritmico)

L'adozione di una scala logaritmica per le ordinate rende rettilinea la curva esponenziale teorica della fig. 13 e dimostra in maniera più evidente la correttezza del lisciamento esponenziale centrato, la cui curva oscilla attorno alla retta teorica. Le oscillazioni della curva lisciata con medie mobili ponderate, invece, si mantengono tutte al di sopra della retta dell'esponenziale di riferimento, testimoniando una sistematica sovrastima.

Il lisciamiento esponenziale centrato: esecuzione pratica

A completamento dell'esposizione del metodo, si riporta un esempio di svolgimento pratico dei calcoli, finalizzato a mostrarne la notevole semplicità d'esecuzione. Tutti i calcoli e i grafici sono stati realizzati col programma Excel® 4.0 della Microsoft Corporation, ma altri fogli elettronici si prestano ugualmente bene allo scopo.

L'esempio è applicato ai dati di portata registrati quotidianamente, dal 1/9/89 al 31/8/92, in ingresso ad un depuratore; il relativo grafico è riportato nella fig. 6. La fig. 15 mostra le estremità superiore e inferiore del foglio di lavoro: le prime due righe vengono riservate a contenere il valore di α e i titoli delle colonne; nella colonna A si introducono le date dal primo all'ultimo giorno della serie e nella colonna B si digitano i dati della serie storica.

Nella cella C3 si introduce il primo valore (arbitrario) della serie previsionale, per il quale è consigliabile utilizzare il valore del primo dato della serie storica, riservandosi di modificarlo in seguito, se necessario, per apportare la correzione empirica descritta nel paragrafo precedente. Analogamente, nell'ultima cella utile della colonna D si introduce, come primo dato della serie retrovisionale, il valore dell'ultimo dato della serie storica.

Nella cella B1 si immette il valore di α e in C4, si introduce la formula di calcolo della serie previsionale

$$y'_t = \alpha (y_{t-1}) + (1-\alpha) (y'_{t-1})$$

utilizzando -ovviamente- i riferimenti di cella secondo la notazione richiesta dal foglio elettronico:

$$= B1 \cdot B3 + (1-B1) \cdot C3$$

Si copia poi tale formula (automaticamente) lungo l'intero intervallo di celle C (C5⇒C1100). La sottolineatura di B1 (nella notazione di Excel si scrive: \$B\$1) è qui impiegata per indicare che tale riferimento di cella è *assoluto* (utilizza cioè il valore *fisso* di α), mentre le notazioni non sottolineate indicano riferimenti di cella *relativi*; ad esempio, nelle celle C7 e C1100 la formula copiata -che tiene conto automaticamente della traslazione di celle effettuata- risulterà:

$$\begin{aligned} &= B1 \cdot B6 + (1-B1) \cdot C6 \\ &= B1 \cdot B1099 + (1-B1) \cdot C1099 \end{aligned}$$

Analogamente, in D3 si immette la formula del

	A	B	C	D	E
1	$\alpha \Rightarrow$	0,06			
2	Data	Portata m³/die	Lisciam. previs.	Lisciam. retrov.	Lisciam. centrato
3	1-9-89	6035	6035	5899	5967
4	2-9-89	6305	6035	5873	5954
5	3-9-89	6170	6051	5874	5953
6	4-9-89	6650	6058	5803	5931
7	5-9-89	5745	6094	5807	5950
...	...	...	...	...	...
1096	27-8-92	10770	11240	10200	10720
1097	28-8-92	10590	11212	10175	10693
1098	29-8-92	10400	11174	10160	10667
1099	30-8-92	10950	11128	10110	10619
1100	31-8-92	10110	11117	10110	10614

Fig. 15

Frammento del foglio elettronico per il
calcolo del lisciamiento esponenziale centrato

L'esempio riporta i primi 5 e gli ultimi 5 dati utilizzati per calcolare la curva lisciata con $\alpha = 0,06$ delle fig. 5 e 6.

In carattere negativo, su sfondo scuro, sono riportate le intestazioni di riga e di colonna. Le colonne A e B contengono i dati della serie storica delle portate quotidiane in ingresso al depuratore delle Querce (Massa). Le celle grigie delle colonne C, D, E contengono, in realtà, le formule di calcolo dei lisciamienti previsionale, retrovisionale e centrato, anche se ne vengono visualizzati solo i risultati. Nella cella B1 viene immesso il valore di α : per variare l'entità del lisciamiento è sufficiente introdurre in B1 un nuovo valore di α . Le celle C3 e D1100 non contengono formule, ma il valore arbitrario assegnato, rispettivamente, alla prima previsione e retrovisione: modificando questi due soli valori si realizza la correzione empirica degli estremi descritta nel testo. Nel caso specifico, sono state utilizzate la prima e l'ultima misurazione di portata, senza apportare alcuna correzione.

lisciamiento retrovisionale (che utilizza i valori delle celle B e D successive):

$$= B1 \cdot B4 + (1-B1) \cdot D4$$

che viene poi copiata lungo l'intero intervallo di celle (D4⇒D1099). In E3, infine, si calcola la media aritmetica tra le previsioni e retrovisioni corrispondenti:

$$= (C3 + D3) / 2$$

copiando poi automaticamente tale formula nell'intervallo E4⇒E1100.

A questo punto tutti i calcoli necessari sono stati espletati e si utilizzano gli intervalli delle colonne B e E (B3⇒B1100 ed E3⇒E1100) per realizzare il grafico della serie originale e del relativo lisciamiento esponenziale centrato. Agli utenti di fogli elettronici non sarà certo sfuggita la grande semplicità dell'intera procedura.

A questo punto, per modificare a piacere l'entità del lisciamento, basta cambiare il solo valore della cella B1. Nel caso di lisciamenti spinti è opportuno controllare le estremità della curva lisciata: se si osserva una deformazione all'estremità sinistra si apporta la correzione empirica modificando, con tentativi mirati, il primo valore previsionale (cella C3); analogamente, se la deformazione è all'estremità destra, si modifica il primo valore retrovisionale (cella D1100).

Qualora la serie originale presenti lacune di pochi dati, è preferibile riempirle con dati fittizi, intermedi tra i termini adiacenti. Se, invece, le lacune sono ampie, occorre assegnare un valore previsionale "arbitrario" alla cella della colonna C corrispondente all'inizio di ciascun tratto di serie e, al termine di ciascun tratto, un valore retrovisionale arbitrario nella corrispondente cella della colonna D. Anche per questi valori arbitrari è consigliabile utilizzare il corrispondente dato reale della serie storica riservandosi, in seguito, di apportare l'eventuale correzione empirica.

Ringraziamenti

L'Autore ringrazia il prof. A. Previtera per aver indicato e fornito i lavori (di non facile reperimento) riportati nella bibliografia, per la lettura critica del testo e, soprattutto, per la passione e la perseveranza profuse per iniziarlo alle discipline statistiche.

BIBLIOGRAFIA

- BOLDRINI M. - 1950. Statistica. Teoria e metodi. Ed. Giuffrè, Milano, 1320 pp.
- BROWN R.G. - 1962. Smoothing, Forecasting and Prediction of discrete time series. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N.J.
- CEMBROWSKI G.S., WESTGARD J.O., EGGERT A.A. AND CLIFFORD Toren E., JR. - 1975. Trend detection in control data: optimization and interpretation of Trigg's technique for Trend Analysis. Clin. Chem., 21 (10): 1396-1405.
- SANTAMARIA L. - 1981. Analisi delle serie storiche. Soc. ed. Il Mulino, Bologna, 355 pp.
- VERCELLI F. - 1940. Guida per l'analisi delle periodicità nei diagrammi oscillanti. CNR, R. Comitato Talassografico Italiano, memoria CCLXXXV, Venezia.
- VIANELLI S. - 1954. Metodologia statistica delle scienze agrarie. Ed. Agricole, Bologna.

APPENDICE

A - Lisciamento con medie mobili ponderate: schemi di combinazioni per il lisciamento e per il calcolo dell'asse medio*
(da VERCELLI, 1940)

LISCIAMENTO							
N	2a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	
3	1/2	1/4					
5	1/3	1/4	1/12				
5	1/4	1/4	1/8				
7	1/4	1/5	1/8	1/20			
9	1/6	1/6	1/8	1/12	1/24		
11	1/6	1/8	1/10	1/12	1/15	1/24	
ASSE MEDIO (PREVIO LISCIAMENTO)							
N	2a ₀	a ₂	a ₄	a ₆	a ₈	a ₁₂	a ₁₆
9	1/4	1/4	1/8				
13	1/4	1/5	1/8	1/20			
17	1/6	1/6	1/8	1/12	1/24		
25	1/4		1/5		1/8	1/20	
33	1/6		1/6		1/8	1/12	1/24

* Si noti che il calcolo dell'asse medio non differisce concettualmente dal lisciamento, ma è, in sostanza, un lisciamento più spinto a partire da dati già lisciati. Combinazioni per ottenere un lisciamento ancora più spinto si ottengono semplicemente raddoppiando una o più volte gli indici dei coefficienti (il che equivale a raddoppiare l'intervallo di tempo scelto come unità del lisciamento). Ad esempio, per calcolare l'asse medio con $n=32$ coppie di dati ($N=2n+1=65$) si utilizzano gli stessi valori dei coefficienti di $N=33$, ma raddoppiandone gli indici:

$$2a_0 = 1/6; \quad a_8 = 1/6; \quad a_{16} = 1/8; \quad a_{24} = 1/12 \quad \text{e} \quad a_{32} = 1/24.$$

B - Il lisciamento esponenziale nelle previsioni

L'analisi delle serie storiche ha ricevuto molte attenzioni (soprattutto nel campo delle scienze bancarie e, più in generale, economiche) in funzione della possibilità di ottenere previsioni dell'andamento di un fenomeno sulla base del suo andamento passato. Per ottenere previsioni affidabili, occorre aggiornarle continuamente in funzione dello scarto registrato tra ogni nuovo dato acquisito e la relativa previsione ("errore di previsione"); si utilizzano quindi tecniche "autoadattative", tra le quali gioca un ruolo di primo piano il lisciamento (o livellamento, o spianamento) esponenziale (SANTAMARIA, 1981).

Un altro campo elettivo di applicazione di questi principi è il controllo di qualità di laboratorio in cui, ad intervalli periodici (di solito quotidianamente), vengono eseguite una o più determinazioni analitiche su uno standard a titolo noto o ignoto. Il valore rilevato da tali determinazioni può essere previsto sulla base dei valori rilevati in precedenza e ogni scarto dalla previsione può essere utilizzato per aggiustare la previsione successiva. Ne è un esempio la tecnica dei "tracking signals" di Trigg per l'analisi del trend (CEMBROWSKI et AL., 1975) che -calcolando l'errore di previsione e verificando se esso differisce significativamente da zero- consente di valutare se il processo è sotto controllo o se si è in presenza di errori grossolani o anche di tendenze lievi, ma sistematiche, che segnalano una deviazione dalla norma (ad esempio, il progressivo deterioramento di un reattivo).

C - Peso percentuale degli ultimi 30 dati di una serie storica per alcuni valori della costante di lisciamiento α
(asterisco = peso inferiore allo 0,001%)

$\alpha \Rightarrow$	0,9	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005
y_t	90,000	70,000	50,000	30,000	20,000	10,000	5,000	2,000	1,000	0,500
y_{t-1}	9,000	21,000	25,000	21,000	16,000	9,000	4,750	1,960	0,990	0,498
y_{t-2}	0,900	6,300	12,500	14,700	12,800	8,100	4,513	1,921	0,980	0,495
y_{t-3}	0,090	1,890	6,250	10,290	10,240	7,290	4,287	1,882	0,970	0,493
y_{t-4}	0,009	0,567	3,125	7,203	8,192	6,561	4,073	1,845	0,961	0,490
y_{t-5}	0,001	0,170	1,563	5,042	6,554	5,905	3,869	1,808	0,951	0,488
y_{t-6}	*	0,051	0,781	3,529	5,243	5,314	3,675	1,772	0,941	0,485
y_{t-7}	*	0,015	0,391	2,471	4,194	4,783	3,492	1,736	0,932	0,483
y_{t-8}	*	0,005	0,195	1,729	3,355	4,305	3,317	1,702	0,923	0,480
y_{t-9}	*	0,001	0,098	1,211	2,684	3,874	3,151	1,667	0,914	0,478
y_{t-10}	*	*	0,049	0,847	2,147	3,487	2,994	1,634	0,904	0,476
y_{t-11}	*	*	0,024	0,593	1,718	3,138	2,844	1,601	0,895	0,473
y_{t-12}	*	*	0,012	0,415	1,374	2,824	2,702	1,569	0,886	0,471
y_{t-13}	*	*	0,006	0,291	1,100	2,542	2,567	1,538	0,878	0,468
y_{t-14}	*	*	0,003	0,203	0,880	2,288	2,438	1,507	0,869	0,466
y_{t-15}	*	*	0,002	0,142	0,704	2,059	2,316	1,477	0,860	0,464
y_{t-16}	*	*	0,001	0,100	0,563	1,853	2,201	1,448	0,851	0,461
y_{t-17}	*	*	*	0,070	0,450	1,668	2,091	1,419	0,843	0,459
y_{t-18}	*	*	*	0,049	0,360	1,501	1,986	1,390	0,835	0,457
y_{t-19}	*	*	*	0,034	0,288	1,351	1,887	1,362	0,826	0,455
y_{t-20}	*	*	*	0,024	0,231	1,216	1,792	1,335	0,818	0,452
y_{t-21}	*	*	*	0,017	0,184	1,094	1,703	1,309	0,810	0,450
y_{t-22}	*	*	*	0,012	0,148	0,985	1,618	1,282	0,802	0,448
y_{t-23}	*	*	*	0,008	0,118	0,886	1,537	1,257	0,794	0,446
y_{t-24}	*	*	*	0,006	0,094	0,798	1,460	1,232	0,786	0,443
y_{t-25}	*	*	*	0,004	0,076	0,718	1,387	1,207	0,778	0,441
y_{t-26}	*	*	*	0,003	0,060	0,646	1,318	1,183	0,770	0,439
y_{t-27}	*	*	*	0,002	0,048	0,581	1,252	1,159	0,762	0,437
y_{t-28}	*	*	*	0,001	0,039	0,523	1,189	1,136	0,755	0,435
y_{t-29}	*	*	*	0,001	0,031	0,471	1,130	1,113	0,747	0,432

D - Lisciamiento esponenziale retrogrado (*retrovisionale*)

A complemento della fig. 5 - che mostra il "ritardo" indotto dal lisciamiento previsionale- si riporta, nella figura sottostante, il corrispondente lisciamiento retrovisionale che genera curve "anticipate" (i picchi lisciati precedono quelli dei dati originali).

Confrontando i lisciami spinti ($\alpha=0,01$) delle due figure risulta palese un'altra deformazione: rispetto ai dati originali, la curva previsionale è slittata verso il basso e quella retrovisionale verso l'alto. Anche la spiegazione di questa deformazione sta nella risposta ritardata generata dall'algoritmo di calcolo. La serie dei dati originali, infatti, pur con ampie oscillazioni, mostra una chiara tendenza crescente; a causa di ciò il lisciamiento previsionale, conservando la "memoria" di una lunga serie di dati precedenti (quindi, in media, con valori inferiori) fornisce una previsione sottostimata; analogamente, il lisciamiento retrovisionale, utilizzando i dati in senso inverso (dai valori più elevati a quelli più bassi), conserva la memoria di dati più elevati e produce quindi una sovrastima.

